TEMA I.- SISTEMAS LINEALES

I.1.- INTRODUCCION : SEÑALES Y SISTEMAS

I.1.1.- SEÑALES

Una señal es cualquier magnitud asociada a un fenómeno físico, función de una o varias variables independientes, que puede ser revelada por un instrumento o percibida por el hombre y que contiene información sobre el fenómeno.

Ejemplos :

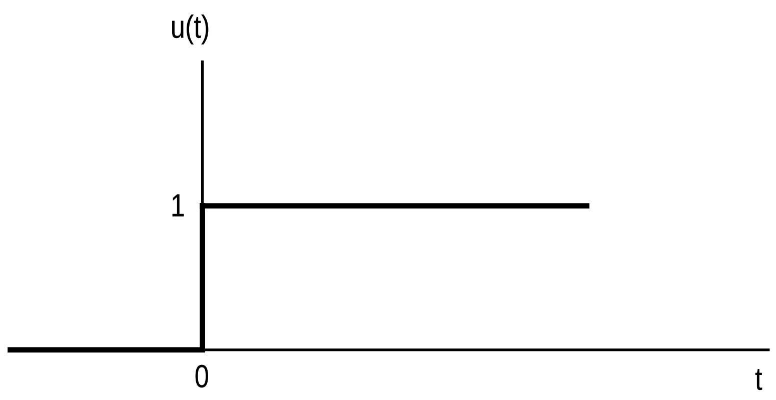
- Señal de voz
- Fotografía
- Velocidad del viento en función de la altura
- Etc.

Matemáticamente puede expresarse, para una sola variable, como :

$$x(t) \qquad -\infty < t < \infty$$

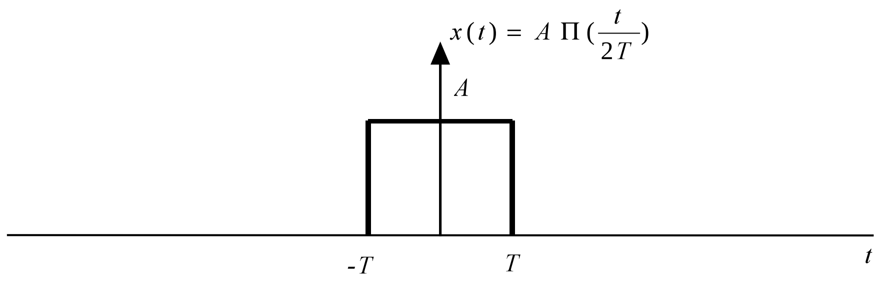
SEÑALES ELEMENTALES

Escalón



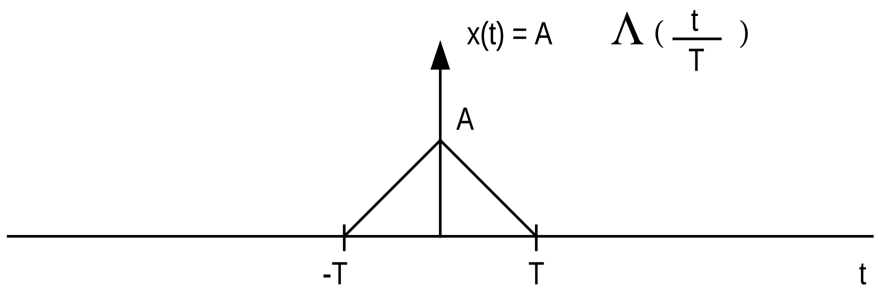
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

PULSO RECTANGULAR



$$\Pi\left(\frac{t}{2T}\right) = \begin{cases} 1 & -T < t < T \\ 0 & \text{RESTO} \end{cases}$$

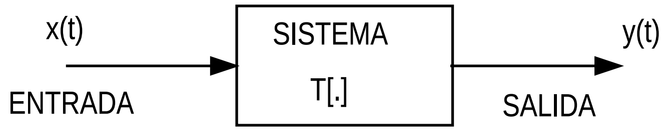
PULSO TRIANGULAR



$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & -T < t < T \\ 0 & \text{RESTO} \end{cases}$$

I.1.2.- SISTEMAS

Un sistema es un proceso que transforma una señal x(t) en otra y(t).



Si no se tiene ningún conocimiento del sistema puede ponerse :

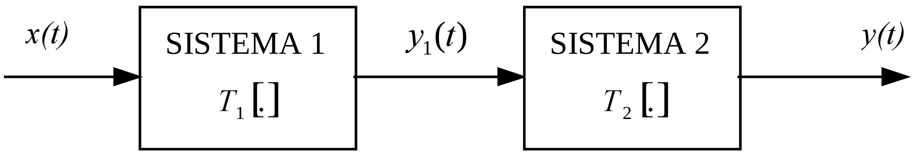
$$y(t) = T[x(t)]$$

Ejemplos de sistemas :

- Circuitos eléctricos
- Cámara de fotografiar
- Sistema auditivo
- Etc.

I.1.2.1.- INTERCONEXION DE SISTEMAS

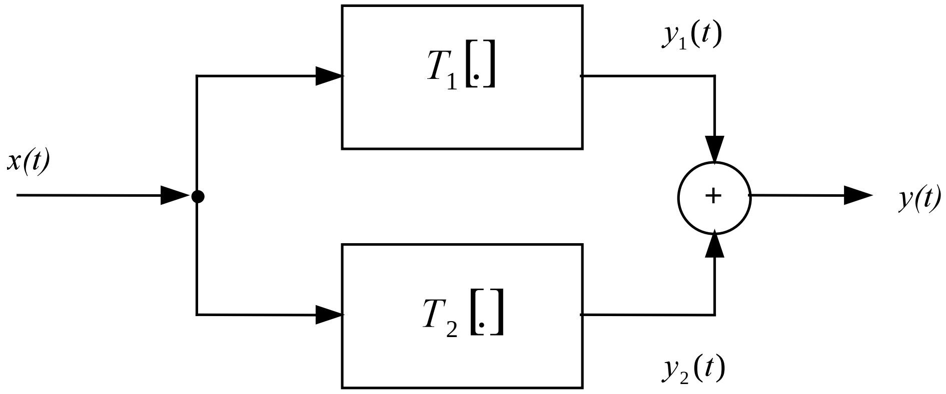
SERIE O CASCADA



$$y(t) = T_2\,[y_1(t)] \;\; = T_2\,[T_1[x(t)]] \; = T[x(t)]$$

$$T = T_2\,[T_1[.]] \; = T_2\,T_1$$

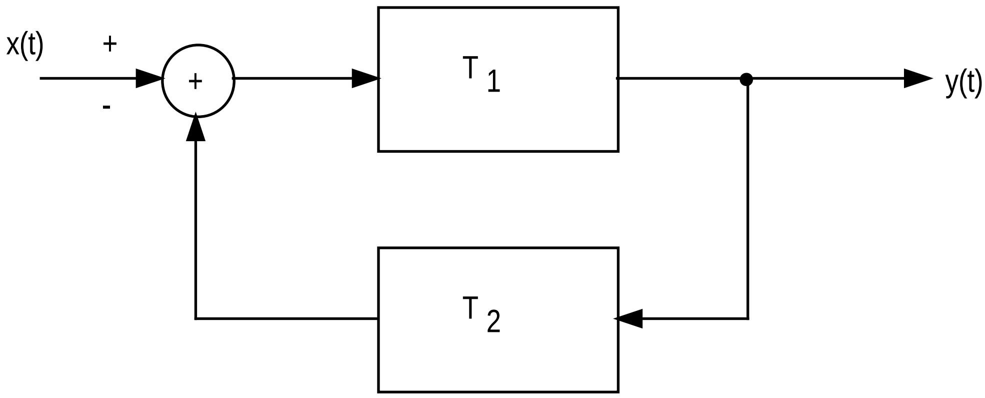
PARALELO



$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = T_1[x(t)] + T_2[x(t)] = T[x(t)]$$

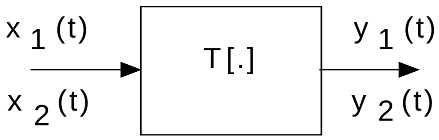
$$T = T_1 + T_2$$

REALIMENTACION



$$y(t) = T_1[x(t)] - T_1\, T_2[y(t)]$$

I.1.2.2.- SISTEMAS LINEALES



El sistema es lineal si verifica que :

$$y(t) = T[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = a_1\ T[x_1(t)] + a_2\ T[x_2(t)] =$$
$$= a_1\, y_1(t) + a_2\, y_2(t)$$

EJEMPLO DE SISTEMA LINEAL

$$T[.] = \frac{d(.)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}[a_1 x_1 + a_2 x_2] = a_1 \frac{dx_1}{dt} + a_2 \frac{dx_2}{dt}$$

EJEMPLO DE SISTEMA NO LINEAL

$$T[.] = (.)^2$$

$$(a_1\, x_1 + a_2\, x_2)^2 = a_1^2\, x_1^2 + a_2^2\, x_2^2 + 2a_1\, a_2\, x_1\, x_2 \neq$$
$$\neq a_1\, x_1^2 + a_2\, x_2^2$$

I.1.2.3.- SISTEMAS INVARIANTES

Sea $y(t) = T[x(t)]$

se dice que el sistema es invariante si :

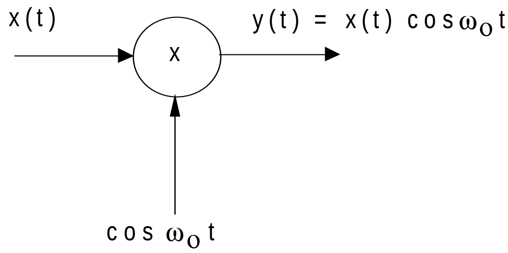
$$T[x(t - t_o)] = y(t - t_o)$$

EJEMPLO DE SISTEMA INVARIANTE

$$T[.] = \int_{-\infty}^{t} (.)\, d\tau \qquad\qquad y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau - t_o)\, d\tau = \left\{ \begin{matrix} \tau - t_o = u \\ d\tau = du \end{matrix} \right\} = \int_{-\infty}^{t-t_o} x(u)du = y(t-t_o)$$

EJEMPLO DE SISTEMA VARIANTE



$$y(t-t_o) = x(t-t_o)\cos\omega_o(t-t_o) \neq x(t-t_o)\cos\omega_o t$$

I.1.2.4.- CAUSALIDAD

Se dice que un sistema es causal si no responde antes de que llegue la entrada. Esto es :

si	$x(t) = 0$	$\forall\ t < t_o$
entonces	$y(t) = T[x(t)] = 0$	$\forall\ t < t_o$

COMENTARIOS SOBRE CAUSALIDAD

Los sistemas causales son de gran importancia, pues todo sistema, inicialmente en reposo, trabajando en tiempo real es causal. No obstante, los sistemas causales no son los únicos que tienen significado práctico. Ejemplos de señales en los que el sistema puede utilizar valores futuros de la entrada pueden ser en :

- Procesado de imagen (ampliación)
- Señales pregrabadas : voz, geofísicas, meteorológicas, etc.

Así pues, la causalidad no debe ser una restricción.

I.1.2.5.- ESTABILIDAD

Un sistema es estable si para toda entrada acotada la salida está acotada. Las condiciones de estabilidad se verán más adelante.

EJEMPLO DE SISTEMA NO ESTABLE

INTEGRADOR

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

si $x(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ Función escalón acotada

$$y(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \text{No acotada}$$

I.2.- CARACTERIZACION DE SISTEMAS LINEALES

En el dominio del tiempo, los sistemas lineales pueden caracterizarse por :

- Ecuaciones diferenciales lineales
- Respuesta al impulso
- Variables de estado

I.2.1.- ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Una clase importante de sistemas puede caracterizarse por una ecuación diferencial lineal que relaciona la entrada y salida. Ejemplos de sistemas de este tipo son los circuitos RLC y los sistemas mecánicos que incluyen resortes y fuerzas de amortiguamiento. Si los elementos "concentrados" del sistema son invariantes en el tiempo, la ecuación diferencial tendrá coeficientes constantes y adopta la forma general :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x}{dt^m}$$

La solución de esta ecuación es de la forma :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$y_h(t)$ = solución de la ecuación homogénea

$y_p(t)$ = solución particular

Para la resolución de la ecuación homogénea :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y_h}{dt^n} = 0$$

se resuelve la ecuación característica

$$\sum_{n=0}^{N} a_n s^n = 0$$

si las raíces de esta ecuación son simples, la solución será de la forma

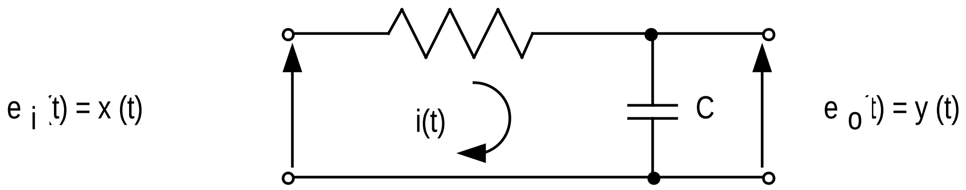
$$y_h(t) = \sum_{n=1}^{N} A_n e^{s_n t}$$

donde las A_n son N constantes arbitrarias y s_n son las N raíces de la ecuación característica.

Si alguna raíz fuese múltiple, la solución es algo más complicada y el procedimiento de resolución puede encontrarse en libros dedicados a este tema.

Para determinar las constantes A_n se precisarán N-condiciones denominadas condiciones iniciales.

EJEMPLO DE SISTEMA DESCRITO POR ECUACIONES DIFERENCIALES



Filtro paso bajo RC

La relación entrada-salida es :

$$x(t) = R\, i(t) + y(t)$$

donde

$$i(t) = C \frac{dy(t)}{dt}$$

Sustituyendo queda la ecuación diferencial :

$$y + \tau_o \frac{dy}{dt} = x \qquad\qquad \tau_o = RC$$

La ecuación característica es :

$$\tau_o s + 1 = 0 \qquad\qquad s = -1/\tau_o$$

por tanto la solución de la homogénea será :

$$y_h(t) = A\, e^{-t/\tau_o}$$

para la solución particular suponemos una entrada :

$$x(t) = [a\cos\omega_o t]\; u(t)$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

La solución particular es :

$$y_p(t) = \frac{a}{\sqrt{1 + (\tau_o\omega_o)^2}} \cos(\omega_o t - \varphi)\; u(t)$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}(\tau_o\, \omega_o)$$

Para la determinación de la constante A necesitamos una condición inicial. Supongamos

$$y(0) = y_o$$

En este caso la solución general (suma de la homogénea y la particular) será :

$$y(t)=y_o\, e^{-t/\tau_o} + \left\{\frac{a}{\sqrt{1+(\tau_o\omega_o)^2}}\left[\cos(\omega_o t-\varphi) - e^{-t/\tau_o}\cos\varphi\right]\right\} u(t)$$

De esta solución se deduce que si a=0, x(t) = 0, y(t) ≠ 0 y por consiguiente el sistema no verifica la condición de linealidad establecida en I.1.2.2, aunque está descrito por ecuaciones diferenciales lineales, ya que una entrada nula produce una salida distinta de cero. El sistema tampoco es invariante ni causal, de acuerdo con las definiciones dadas en I.1.2.3 y I.1.2.4, respectivamente.

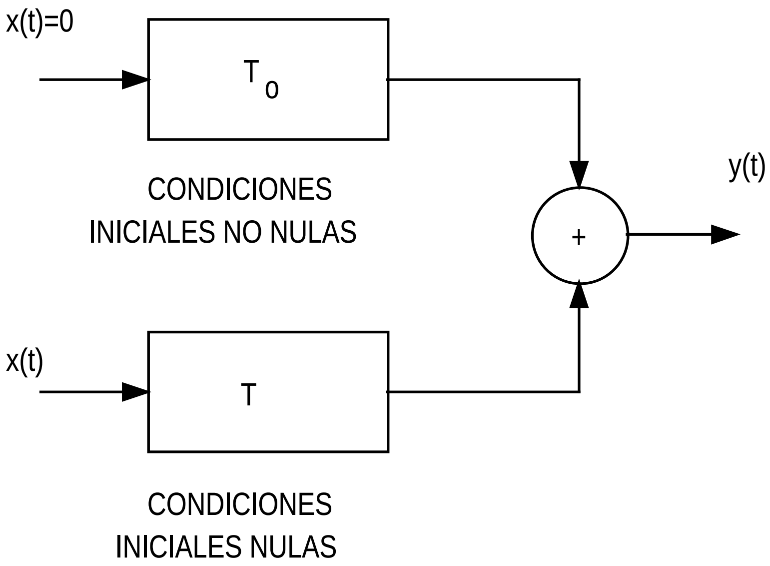
Si se cumple que $y_o = 0$, el sistema será lineal, causal e invariante. Si se cumple esta condición el sistema estará inicialmente en reposo, esto es, no tendrá ninguna energía almacenada (condensador descargado).

Todas estas consideraciones pueden generalizarse a un sistema de orden N en la variable y, así si un sistema de orden N está inicialmente en reposo se cumplirá que :

$$y(0) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = \ldots = \left.\frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}}\right|_{t=0} = 0$$

y el sistema será lineal, causal e invariante.

Si un sistema tiene almacenada energía (condiciones iniciales no nulas) puede descomponerse como en la figura.



Definiciones de linealidad, causalidad e invarianza que incluyen también la respuesta libre (sistema superior) y que están más en consonancia con la idea intuitiva de tales conceptos, pueden encontrarse en diversos textos de sistemas lineales. En lo que sigue, sólo se considerarán sistemas relajados, esto es, con condiciones iniciales nulas.

La descripción de un sistema mediante ecuaciones diferenciales es, en muchas ocasiones, de difícil manipulación y solución, obliga a entrar en consideraciones de cómo está constituido el sistema, es decir, requiere conocer los coeficientes y finalmente no es un método experimental de análisis de sistemas lineales.

I.2.2.- RESPUESTA IMPULSIONAL

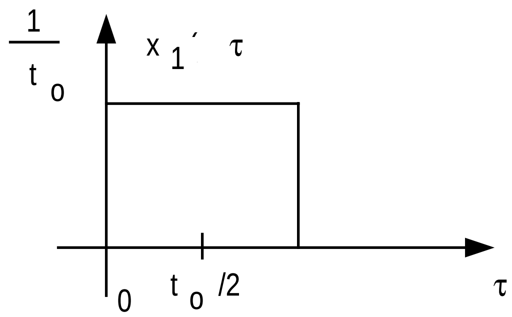
INTRODUCCION

Supongamos un integrador en un período de T-segundos.

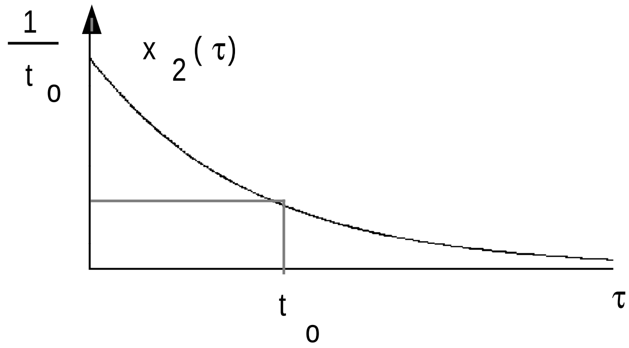
$$y(t) = \int_{t-T}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

y sean las entradas $x_1(t)$ y $x_2(t)$

$$x_1(\tau) = \frac{1}{t_o}\Pi\left(\frac{\tau - t_o/2}{t_o}\right)$$



$$x_2(\tau) = \frac{1}{t_o}e^{-\tau/t_o}u(\tau)$$



con $t_o < T$

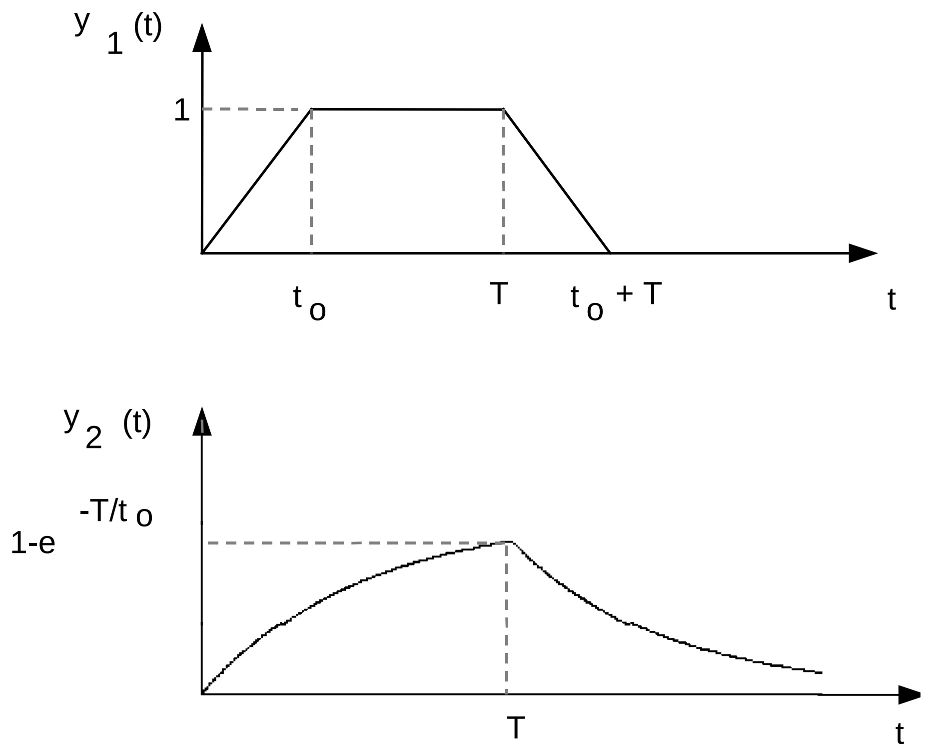
Ambas entradas verifican :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)\, d\tau = 1 \quad ; \qquad \forall\, t_o$$

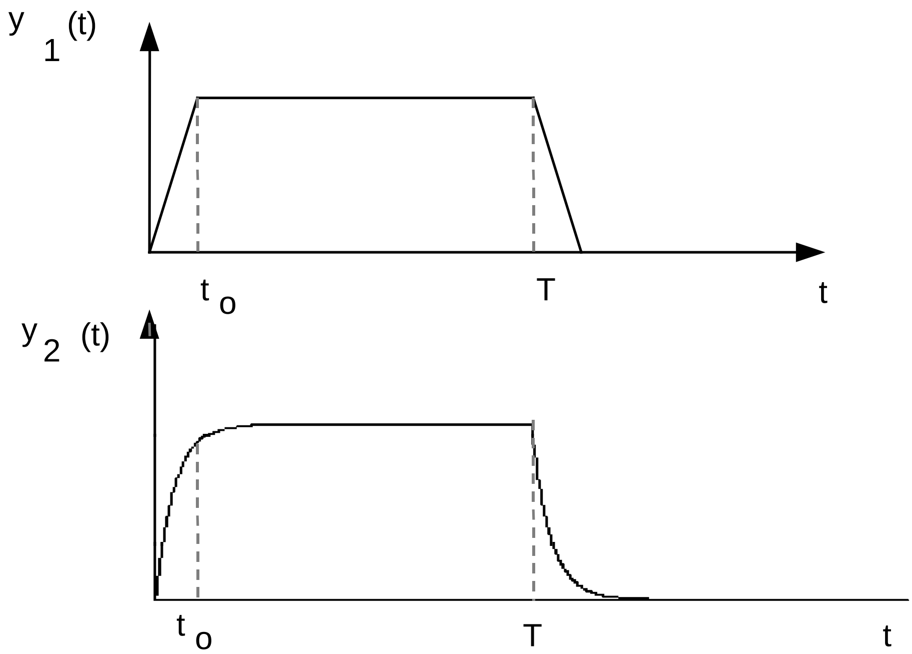
Las salidas correspondientes a ambas señales son :

$$y_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t/t_o & 0 < t < t_o \\ 1 & t_o < t < T \\ (t_o - t + T)/t_o & T < t < t_o + T \\ 0 & t_o + T < t \end{cases}$$

$$y_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-t/t_o} & 0 < t < T \\ e^{-t/t_o}\,(e^{T/t_o} - 1) & T < t \end{cases}$$



Ambas señales de salida no tienen gran parecido, no obstante si T >> t_o ambas señales se aproximan bastante.

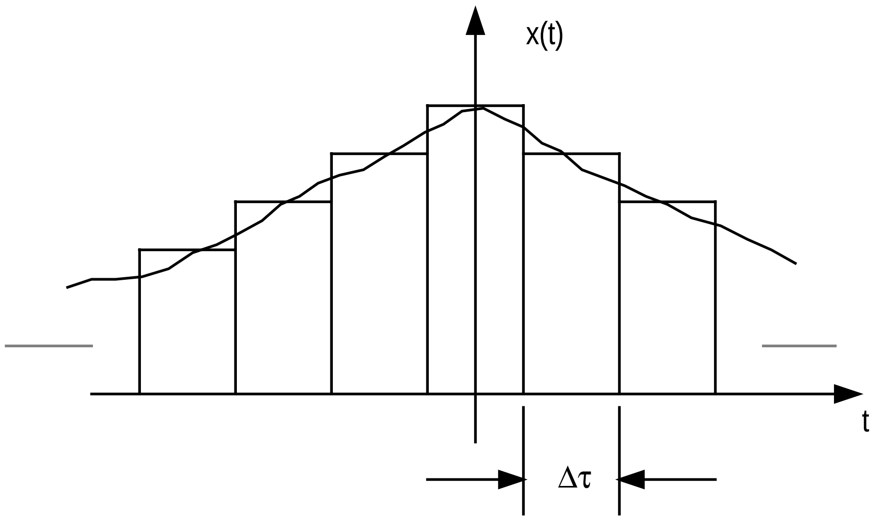


En el límite t_o $\rightarrow$ambas señales coinciden, lo que sugiere un invariante, en una prueba experimental. La salida no depende de la forma de la entrada sino de su área normalizada a la unidad. Esta es la respuesta al impulso. En este caso representaremos al sistema por una función característica y no por una ecuación característica.

I.2.3.- INTEGRAL DE CONVOLUCION

Para obtener la salida de un sistema en función de la respuesta al impulso y la entrada, formemos a partir de ésta la siguiente función :

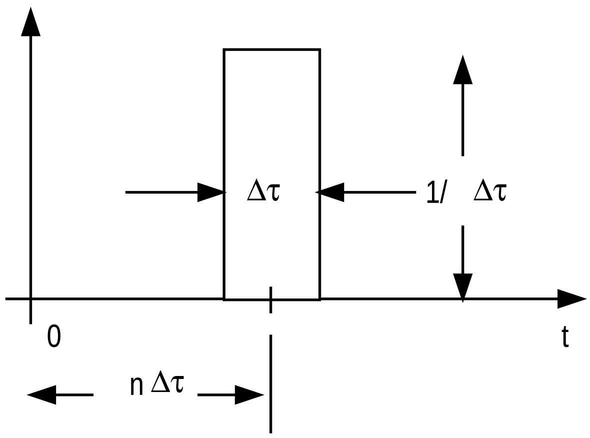
$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) \prod\left(\frac{t-n\Delta\tau}{\Delta\tau}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau)\left[\frac{1}{\Delta\tau}\prod\left(\frac{t-n\Delta\tau}{\Delta\tau}\right)\right]\Delta\tau$$



Evidentemente

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \hat{x}(t)$$

La función



ó

$$\lim_{\Delta\tau \to \infty} \frac{1}{\Delta\tau}\, \Pi\left(\frac{t-n\Delta\tau}{\Delta\tau}\right) = \delta\,(t-\tau)$$

Es la función impulso o delta de Dirac y, burdamente hablando, puede decirse que es un pulso de amplitud infinita y duración cero. Esta función puede ser tratada como una función generalizada o función de distribución y no tiene sentido definirla punto por punto. No obstante, no habrá problemas en el tratamiento de deltas como funciones ordinarias, ya que siempre aparecerán bajo el signo integral, y en ese caso

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \delta(t-\tau) d\tau$$

la función delta puede obtenerse como límite de otras funciones como por ejemplo la del apartado anterior

$$\delta(t) = \lim_{t_o \to 0} \frac{1}{t_o} e^{-t/t_o}$$

En general :

si $\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, dt = 1$

entonces $\delta(t) = \lim_{k \to \infty} k\ s(kt) = \lim_{c \to 0} \frac{1}{c} s(t/c)$

Definiendo $h(t,\tau)$ la respuesta en t a un impulso en el instante τ

$$h(t,\tau) = T[\delta(t-\tau)]$$

la salida y(t) valdrá para un sistema lineal

$$y(t) = T[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, T[\delta(t-\tau)]\, d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t,\tau) d\tau \qquad \text{S.L.}$$

Si además el sistema es invariante $h(t,\tau) = h(t-\tau)$ y la salida

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \qquad \text{S.L.I.}$$

Que se conoce como integral de convolución o simplemente convolución y que en forma escueta se escribirá.

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

I.2.3.1.- PROPIEDADES DE LA CONVOLUCION

La convolución es conmutativa

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, dt = \begin{Bmatrix} t - \tau = u \\ \end{Bmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-u)h(u)\, du$$

$$= h(t) * x(t)$$

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

La convolución es asociativa

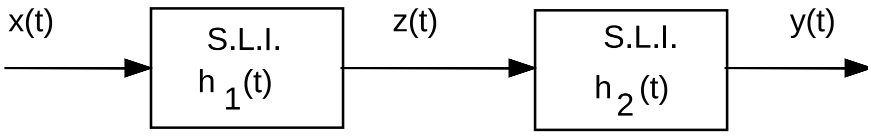
$$z(t) = x(t) * [y(t) * h(t)] = [x(t) * y(t)] * h(t) = x(t) * y(t) * h(t)$$

La convolución es distributiva respecto de la suma

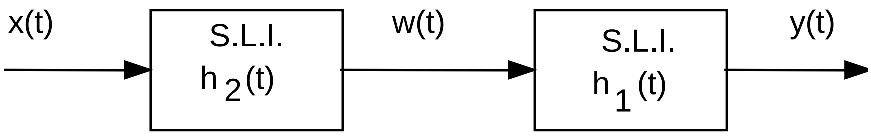
$$z(t) = h(t) * [x(t) + y(t)] = h(t) * x(t) + h(t) * y(t)$$

De la propiedad conmutativa se concluye que dos sistemas lineales invariantes (S.L.I.) conectados en cascada son completamente permutables. Así los sistemas :

$$h(t)=h_1(t)*h_2(t)$$



$$h(t)=h_2(t)*h_1(t)$$

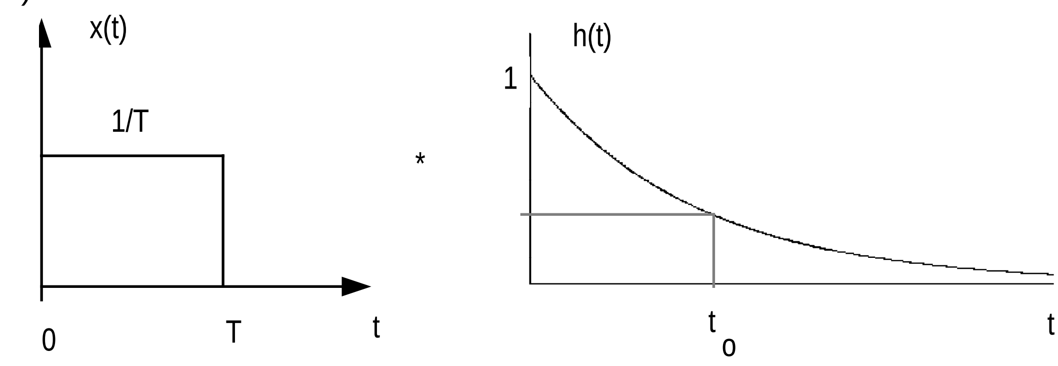


Son equivalentes.

La propiedad asociativa permite generalizar lo anterior a cualquier número de sistemas en cascada.

EJEMPLOS DE CALCULO DE CONVOLUCION

1)



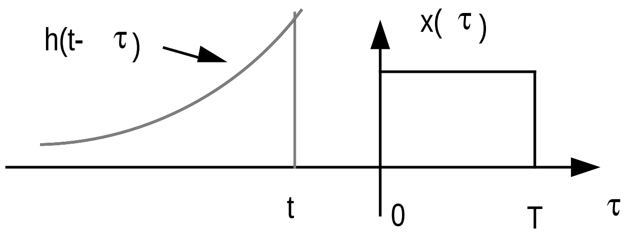
$$x(t) = \frac{1}{T}\ \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \qquad\qquad h(t) = e^{-t/t_0}\ u(t)$$

La convolución es

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

Así, puede invertirse bien $x(\tau)$ bien $h(\tau)$. En cualquier caso pueden distinguirse 3 zonas.

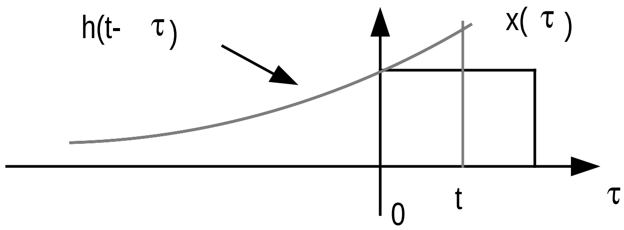
a)



En este caso no se solapan y por tanto la integral es cero.

$$y(t) = 0 \qquad\qquad t < 0$$

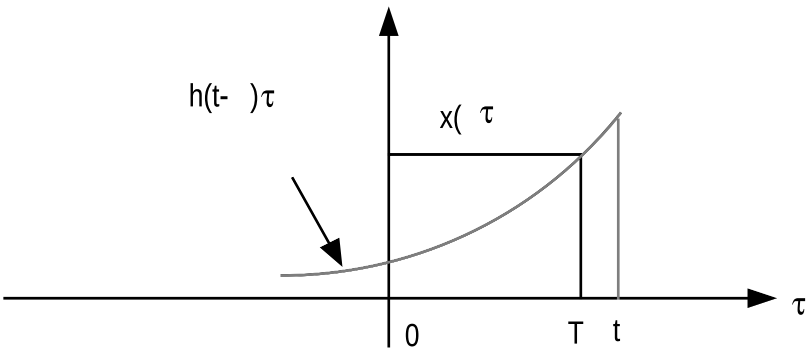
b)



En este caso hay solapamiento parcial.

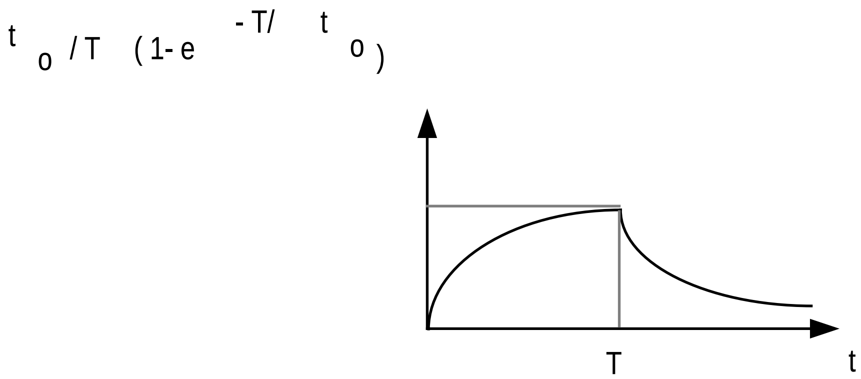
$$y(t) = \int_0^t \frac{1}{T} \; e^{-(t-\tau)/t_o} \; d\tau = \frac{t_o}{T} \left(1 - e^{-t/t_o}\right) \qquad 0 < t < T$$

c)

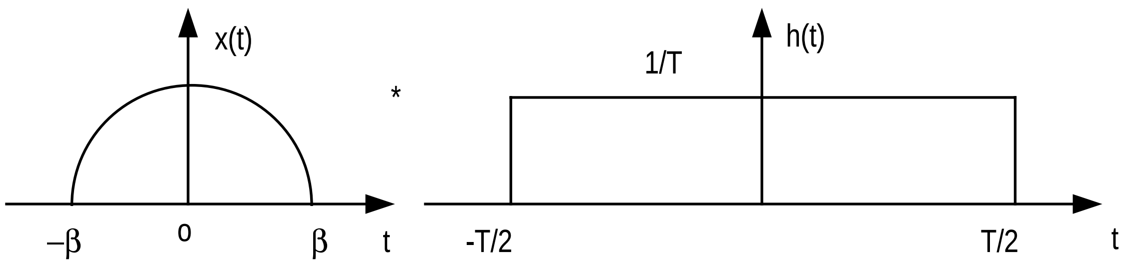


$$y(t) = \int_0^T \frac{1}{T} \; e^{-(t-\tau)/t_o} \, d\tau \; = \; \frac{t_o}{T} \left(e^{T/t_o} - 1 \right) \; e^{-t/t_o} \qquad\qquad t > T$$

La señal de salida es



2)

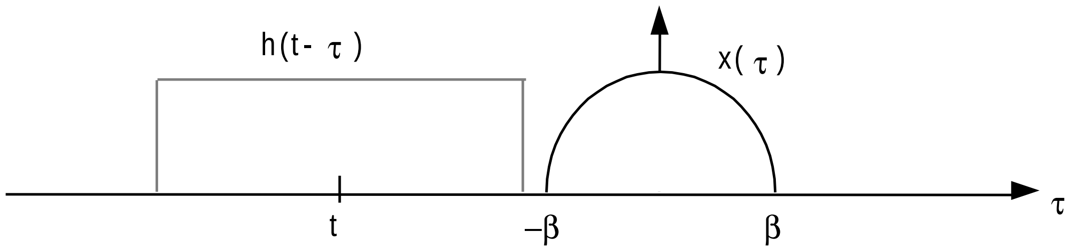


$$x(t) = \cos \frac{\pi t}{2\beta} \; \Pi\left(\frac{t}{2\beta} \right) \qquad\qquad h(t) \; = \frac{1}{T} \; \Pi\left(\frac{t}{T} \right)$$

$$T/2 > \beta$$

En este ejemplo se tendrán cinco zonas.

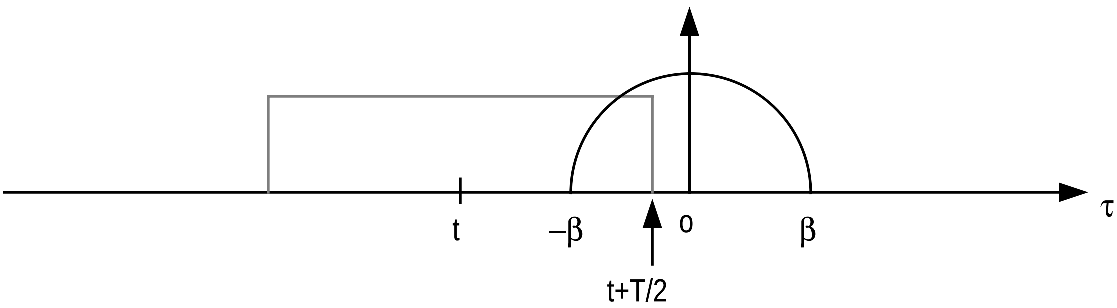
a)



No hay solapamiento.

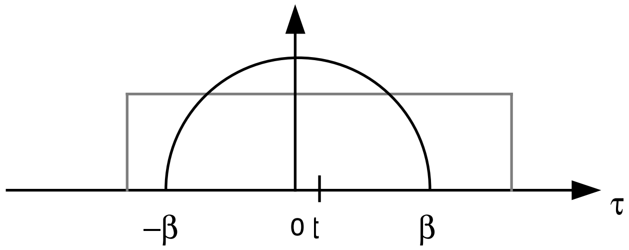
$$y(t) = 0 \qquad t < -\beta - T/2$$

b)



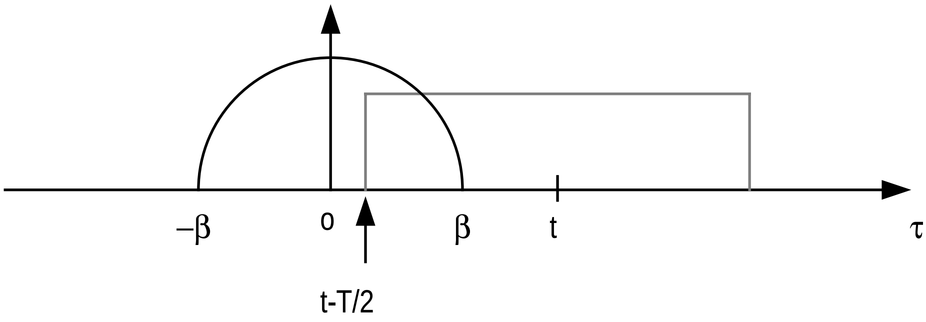
$$y(t) = \int_{-\beta}^{t+T/2} \frac{1}{T} \cos\frac{\pi\tau}{2\beta}\, d\tau \qquad -\beta - T/2 < t < \beta - T/2$$

c)



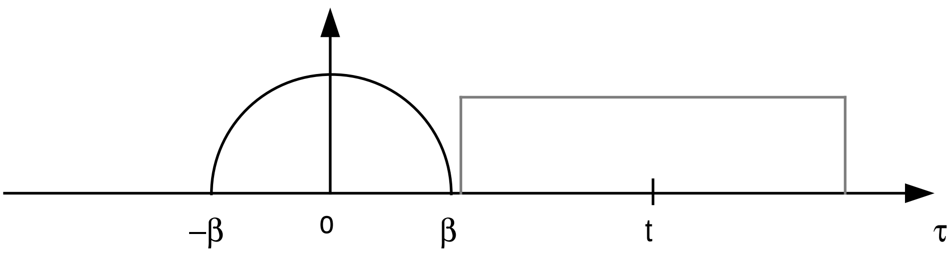
$$y(T) = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{1}{T} \cos\frac{\pi\tau}{2\beta}\, d\tau \qquad \beta - T/2 < t < -\beta + T/2$$

d)



$$y(t) = \int_{t-T/2}^{\beta} \frac{1}{T} \cos\frac{\pi\tau}{2\beta}\, d\tau \qquad -\beta + T/2 < t < \beta + T/2$$

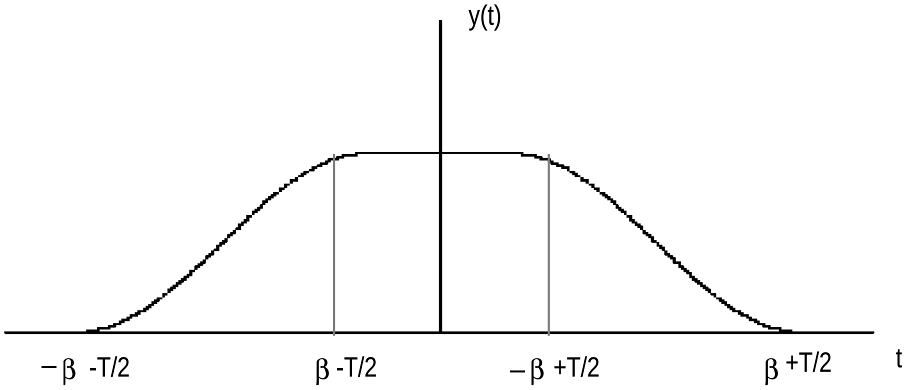
e)



$$y(t) = 0 \qquad t > \beta + T/2$$

La señal de salida es :

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < -\beta - T/2 \\ \dfrac{2\beta}{\pi T}\left[1 + \text{sen}\,\dfrac{\pi(T/2 + t)}{2\beta}\right] & -\beta - T/2 < t < \beta - T/2 \\ \dfrac{4\beta}{\pi T} & \beta - T/2 < t < -\beta + T/2 \\ \dfrac{2\beta}{\pi T}\left[1 + \text{sen}\,\dfrac{\pi(T/2 - t)}{2\beta}\right] & -\beta + T/2 < t < \beta + T/2 \\ 0 & t > \beta + T/2 \end{cases}$$



Obsérvese que la duración de la salida es la suma de las duraciones de la entrada y respuesta impulsional.

I.2.3.2.- CAUSALIDAD

Si $h(t,\tau)$ es la respuesta de un sistema lineal en el instante t a un impulso en el instante τ, el sistema será causal si

$$h(t,\tau) = 0 \qquad t < \tau$$

es decir el sistema no debe responder antes de que haya entrada.
Si el sistema además de lineal es invariante

$$h(t) = 0 \qquad t < 0$$

I.2.3.3.- ESTABILIDAD

Si $|x(t)| < M$; $\forall t$ (entrada acotada)

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t-\tau)\right| \left|h(\tau)\right| d\tau <$$

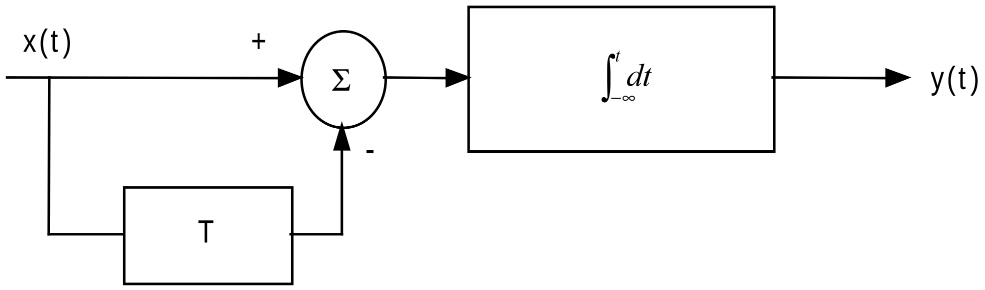
$$< M \int_{-\infty}^{\infty} \left|h(\tau)\right| dt$$

Luego para que la salida esté acotada se debe verificar

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau < \infty$$

I.2.4.- DETERMINACION DE LA RESPUESTA AL IMPULSO

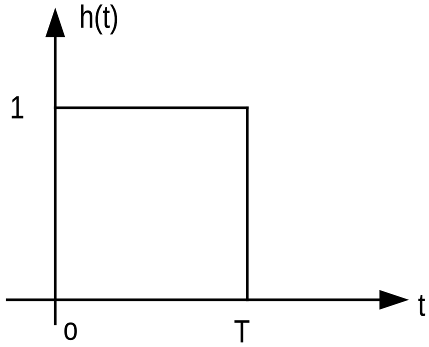
A PARTIR DEL DIAGRAMA DE BLOQUES



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(\tau) - x(\tau - T)]d\tau$$

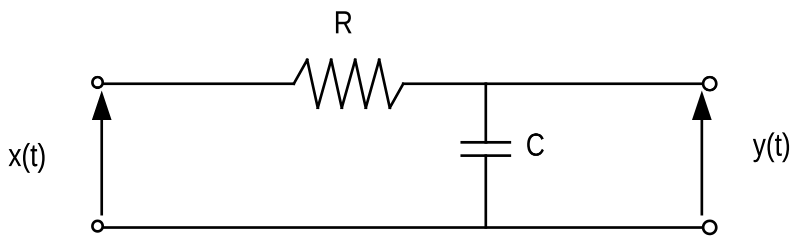
si $x(t) = \delta(t)$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} [\delta(\tau) - \delta(\tau\text{-}T)]\, d\tau = \begin{cases} u(t) - u(t\text{-}T) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = \Pi\left(\frac{t\text{-}T/2}{T}\right)$$



A PARTIR DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Sea el ejemplo estudiado anteriormente



$$\tau_o \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$\tau_o = RC$$

La respuesta impulsional obedecerá

$$\tau_o \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = \delta(t)$$

o lo que es lo mismo

$$\tau_o \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = 0 \qquad t \lessgtr 0$$

Integrando la otra ecuación entre o^- y o^+

$$\tau_o \left[h(o^+) - h(o^-)\right] + \int_{o^-}^{o^+} h(t)dt = 1$$

La integral es cero ya que h(t) no debe tener impulsos en el origen. Además si el sistema debe ser causal $h(o^-) = 0$, luego

$$h(o^+) = 1/\tau_o$$

Así pues la respuesta impulso se calcula resolviendo la homogénea para t>0 sujeta a esta condición de contorno. La solución de la homogénea es :

$$h(t) = A\, e^{-t/\tau_o}\; u(t)$$

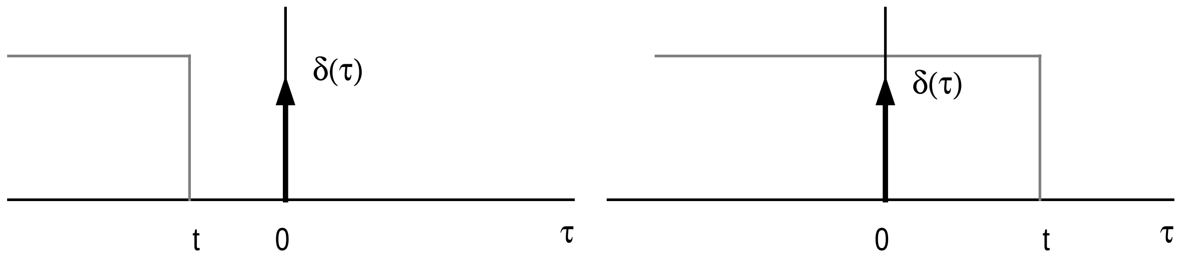
Imponiendo la condición de contorno $A = 1/\tau_o$

$$h(t) = \frac{1}{t_o}\; e^{-t/\tau_o}\; u(t)$$

Este procedimiento puede generalizarse a ecuaciones diferenciales de cualquier orden. No obstante, como se verá más adelante, la solución es más simple en el dominio de la transformada.

I.2.5.- RESPUESTA AL ESCALON UNIDAD

Otra forma de caracterizar un sistema es mediante su respuesta al escalón unidad, para ello veamos primero la relación entre el impulso y el escalón.



Es evidente que

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \qquad \text{ó} \qquad \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Sea ahora a(t) la respuesta al escalón

$$a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{0}^{\infty} h(t-\tau)\, d\tau = \left\{ t-\tau = u \right. = \int_{-\infty}^{t} h(u)\, du$$

Luego

$$a(t) = \int_{-\infty}^{t} h(u)\, du \qquad\qquad h(t) = \frac{da(t)}{dt}$$

La respuesta al impulso es la derivada de la respuesta al escalón.

I.2.6.- SINTESIS DE SISTEMAS

En muchas situaciones se conocerá la entrada al sistema y su salida y se deseará hallar la respuesta impulsional garantizando estabilidad y causalidad, es decir, habría que resolver la ecuación.

$$\underbrace{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)}_{\text{datos}}\ \underbrace{h(t-\tau)}_{\text{incógnita}}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, h(\tau) d\tau$$

Que se conoce como problema de deconvolución. El problema es bastante difícil por estar la incógnita bajo el signo integral, por lo que se hace necesaria alguna otra representación de sistemas lineales e invariantes como se verá a continuación.

I.3.- AUTOFUNCIONES DE LA ECUACION DE CONVOLUCION

Sea e^{st} la entrada a un sistema lineal e invariante. La salida será :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{s(t-\tau)}\, d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\omega$$

$$= H(s)\, e^{st}$$

Es decir, la salida es la misma entrada multiplicada por un factor H(s). Por tanto e^{st} es una autofunción de cualquier S.L.I. y H(s) es el autovalor correspondiente denominado también función de transferencia del sistema.

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-st}\, dt$$

H(s) es la transformada de Laplace bilateral de la respuesta impulsional.

I.3.1.- TRANSFORMADA DE FOURIER

Haciendo $s = j\omega$ en la transformada de Laplace se obtiene la respuesta frecuencial :

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Que es la transformada de Fourier de la respuesta impulsional y que también será representada por

$$H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$$

$$h(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} H(\omega)$$

Donde por simplicidad se ha omitido la unidad imaginaria j en el argumento.

Análogamente podemos definir la transformada de Fourier de una señal x(t).

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

I.3.2.- UTILIZACION DE LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE Y FOURIER

La transformada de Laplace es idónea para el estudio del régimen transitorio de sistemas lineales, estudio de sistemas de control, para el estudio de las propiedades analíticas de la transformada de Fourier, especialmente singularidades y para la evaluación, en algunos casos, de la transformada inversa de Fourier mediante una modificación conveniente del camino de integración. Es una expresión matemática carente de significado físico.

Por el contrario la transformada de Fourier tiene interpretación física como espectros, diagramas de difracción, etc. Además, al ser función de una sola variable real, puede dibujarse la respuesta frecuencial y observar de una manera intuitiva sus propiedades.

I.3.3.- FORMULA DE INVERSION

Para obtener la transformada inversa de Fourier, partiremos de la identidad

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\, d\omega$$

En efecto

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\, d\omega = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} e^{j\omega t}\, d\omega =$$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{\text{sen at}}{\pi t} = \lim_{a\to\infty} a\,\frac{\text{sen at}}{\pi(at)}$$

Que coincide con la función δ(t) según se ha visto anteriormente ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen t}}{\pi t}\, dt = 1$$

Obsérvese que al ser $e^{j\omega t}$ autofunciones del sistema, cualquier función, en este caso δ(t), puede escribirse como combinación lineal de ellas.

Teniendo en cuenta que

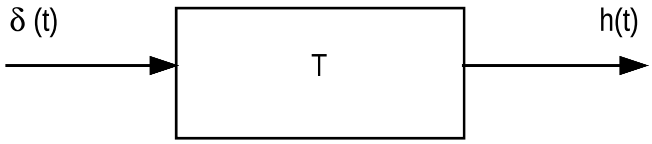
$$T[\delta(t)] = h(t)$$

$$T\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\, d\omega\right] = \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{\infty} T[e^{j\omega t}]\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\, e^{j\omega t}\, dt$$

Luego

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\, e^{j\omega t}\, dt$$

Transformada inversa de Fourier



$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\, d\omega \qquad\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

Análogamente la transformada inversa de Fourier de una señal será

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

Otra forma de verlo

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \delta(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)}\, d\omega\right] d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau\right] d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

I.3.4.- TEOREMA DE CONVOLUCION

Sea x(t) la entrada a un S.L.I. con respuesta impulsional h(t). La salida será

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Sustituyendo x(t) por la integral de Fourier para inversión

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega \right] d\tau$$

Intercambiando las integrales

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, e^{j\omega\tau}\, d\tau \right] d\omega \;=\; \{t-\tau=u\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\, e^{-j\omega u}\, du \right] d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, H(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

Teniendo en cuenta que la transformada inversa de Y(ω) es

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

Identificando se obtiene

$$Y(\omega) = X(\omega)\, H(\omega)$$

Es decir, la transformada de Fourier de la salida (convolución de la entrada con la respuesta impulsional) es el producto de las transformadas de la entrada y de la respuesta impulsional.

$$\mathcal{F}\,[x(t) * h(t)] = X(\omega)\,H(\omega)$$

La convolución se reduce a un producto en el dominio de la transformada y por tanto la deconvolución se convierte en un cociente.

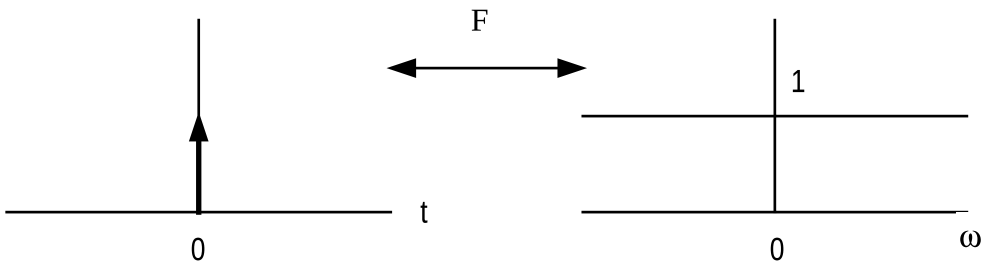
$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \qquad\qquad h(t) = \mathcal{F}^{-1}\,[H(\omega)]$$

I.3.5.- EJEMPLOS DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

TRANSFORMADA DEL IMPULSO

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = 1$$

$$\delta(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad 1$$



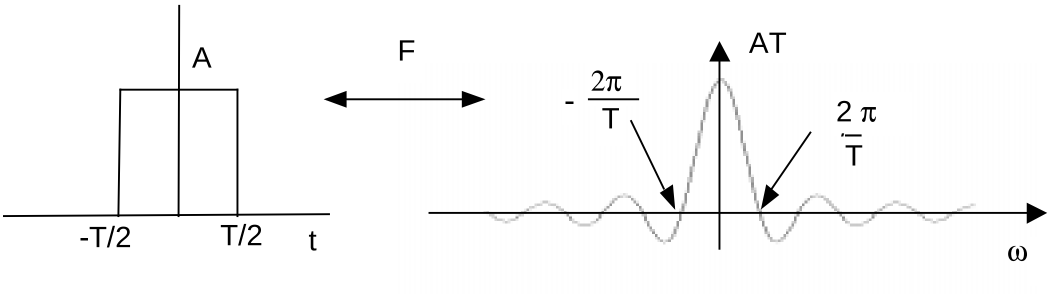
TRANSFORMADA DE UN PULSO RECTANGULAR

$$h(t) = A\prod\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$H(\omega) = A \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t}\, dt = A\,\frac{2\,\mathrm{sen}\,\omega T/2}{\omega}$$

$$= AT\,\frac{\mathrm{sen}\,\pi f T}{\pi f T} = AT\,\mathrm{sin\,c}\,f\,T$$

$$A\prod\left(\frac{t}{T}\right) \overset{F}{\leftrightarrow} A\,\frac{2\,\mathrm{sen}\,\omega\,T/2}{\omega}$$



FILTRO PASO BAJO RC

$$h(t) = \frac{1}{\tau_o}\; e^{-t/\tau_o}\; u(t)$$

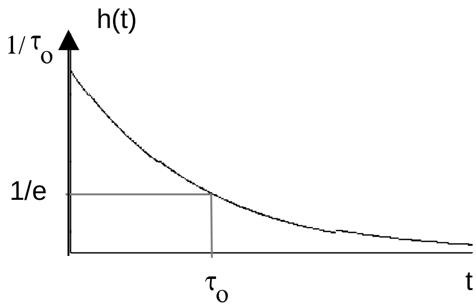
$$H(\omega) = \frac{1}{\tau_o}\int_0^{\infty} e^{-(j\omega+\frac{1}{\tau_o})\,t}\, dt = \frac{1}{1+j\omega\tau_o}$$

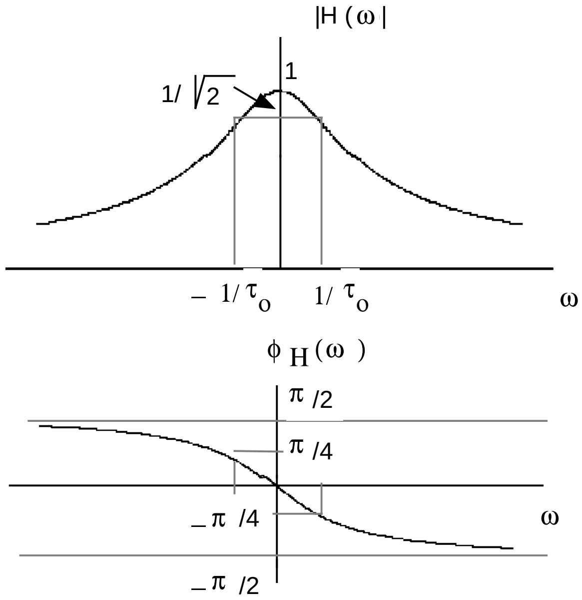
$$\frac{1}{\tau_o}\; e^{-t/\tau_o}\; u(t) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{1+j\omega\tau_o}$$

En este caso, la transformada es compleja y habrá que representar el módulo y la fase

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+(\omega\tau_o)^2}$$

$$\varphi_H(\omega) = -\mathrm{arctg}(\omega\tau_o)$$





La frecuencia de corte definida a 3dB, esto es

$$10 \log \frac{|H(\omega_c)|^2}{|H(0)|^2} = -3\text{dB}$$

Vale $\omega_c = 1/\tau_o$. La banda de paso del filtro estará comprendida entre $-1/\tau_o < \omega < 1/\tau_o$ y en esta banda la fase es aproximadamente lineal, es decir, habrá pequeña distorsión a la salida del filtro como se verá más adelante.

Para frecuencias muy elevadas el módulo decae como

$$\underset{\omega \to \infty}{|H(\omega)|^2} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{\omega^2}$$

Así pues entre una frecuencia ω_o y el doble de la misma la relación en dBs es

$$10\log \frac{|H(2\omega_o)|^2}{|H(\omega_o)|^2} \quad \to \quad -6\text{dB}$$

Se dice que la respuesta decae a un ritmo de 6dB/octava.

I.3.6.- INTERPRETACION DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

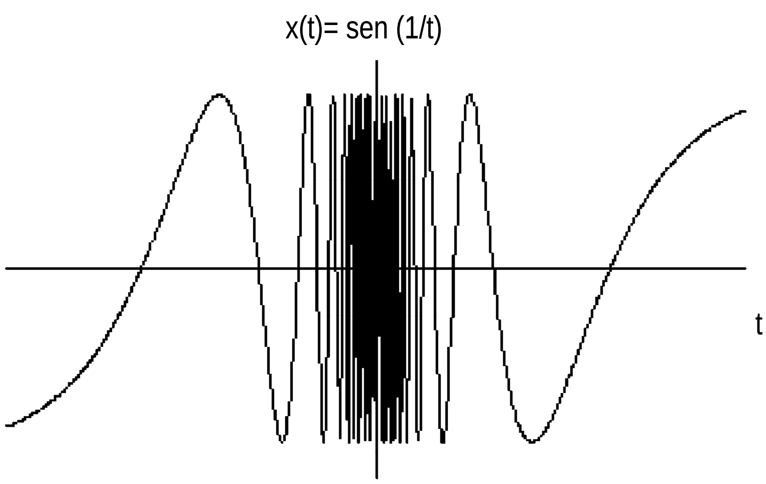
Físicamente, la interpretación de la transformada de Fourier de una señal x(t) sólo puede hacerse en términos de energía que se verá más adelante. No obstante, puede adelantarse que el contenido frecuencial de una señal será tanto mayor a una frecuencia dada cuanto mayor sea el módulo de su transformada a esa frecuencia $|X(\omega)|$, más concretamente el módulo cuadrado $|X(\omega)|^2$.

I.3.7.- CONDICIONES DE EXISTENCIA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Obviamente, cualquier señal que podamos generar físicamente, poseerá transformada de Fourier, es decir, poseerá un espectro de energía. No obstante vale la pena preguntarse si cualquier función matemática posee transformada.

CONDICIONES DE EXISTENCIA

1.- La función debe ser de variación acotada, esto es, en cualquier intervalo finito la curva debe tener longitud finita. Un ejemplo de función que no es de variación acotada es



Esta función no tiene transformada de Fourier, pero no hay que preocuparse excesivamente, ya que no es realizable físicamente ni siquiera como aproximación.

2.- Si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$$

la transformada existe. En efecto

$$|X(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$$

No obstante, esta condición sólo es suficiente, no es necesaria.

Ejemplo :

$$x(t) = \frac{\operatorname{sen}\omega_o t}{t} \qquad\qquad X(\omega) = \pi \prod \left(\frac{\omega}{2\omega_o} \right)$$

No es módulo integrable y sin embargo su transformada existe.

3.- Cualquier discontinuidad tiene que ser de salto finito y el número de discontinuidades en un intervalo finito también ha de ser finito. Estas condiciones también son suficientes. Si una función es discontinua en un punto, t_o , la transformada inversa devuelve el valor (Ver fenómeno de Gibbs).

$$f(t_o) = \frac{f(t_o^+)-f(t_o^-)}{2}$$

con las condiciones anteriores, las funciones

sen t
u(t)
$\delta(t)$

No tendrían transformada de Fourier. Tampoco son realizables físicamente. No obstante puede representar aproximadamente funciones realizables físicamente. Las funciones

$$e^{-\alpha t^2} \text{ sen } t$$
$$e^{-\alpha t^2} \, u(t)$$
$$\frac{1}{\alpha} \prod \left(\frac{t}{\alpha} \right)$$

Tienen transformada y tienden a las funciones anteriores cuando $\alpha \varnothing 0$. Por tanto podremos considerar que aquellas funciones tienen transformada en el límite.

I.3.8.- PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

I.3.8.1.- TRANSFORMADA DE UNA SEÑAL REAL

Sea x(t) real

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} \, dt$$

$$Re[X(\omega)] = R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos\omega t \, dt$$

$$Im[X(\omega)] = I(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \,\text{sen}\,\omega t \, dt$$

Se cumple que :

$R(-\omega) = R(\omega)$ Función par

$I(-\omega) = -I(\omega)$ Función impar

Conclusión :

$X(-\omega) = X^*(\omega)$ $X(\omega)$ es hermítica

I.3.8.2.- TRANSFORMADA DE UNA SEÑAL IMAGINARIA PURA

Sea x(t) = jx'(t)

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x'(t)\operatorname{sen}\omega t \, dt \qquad I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x'(t) \cos\omega t \, dt$$

se cumple que :

$R(-\omega) = -R(\omega)$ impar ; $I(-\omega) = I(\omega)$ par

Conclusión

$$X(-\omega) = -X^{*}(\omega)$$

$X(\omega)$ es antihermítica

I.3.8.3.- FUNCION REAL PAR

Sea $x(-t) = x(t)$

$$\left.\begin{aligned} R(\omega) &= 2\int_{0}^{\infty} x(t)\cos\omega t \, dt \\ I(\omega) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad X(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} x(t)\cos\omega t dt$$

I.3.8.4.- FUNCION REAL IMPAR

Sea $x(-t) = -x(t)$

$$\left.\begin{aligned} R(\omega) &= 0 \\ I(\omega) &= -2\int_{0}^{\infty} x(t)\operatorname{sen}\omega t dt \end{aligned}\right\} \quad X(\omega) = -2j\int_{0}^{\infty} x(t)\operatorname{sen}\omega t dt$$

I.3.8.5.- FUNCION REAL GENERAL

Cualquier función real puede escribirse como :

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

siendo la parte par e impar respectivamente

$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

$$x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

Puesto que

$$\mathcal{F}[x(-t)] = X^*(\omega) \qquad \text{si } x(t) \text{ es real se tiene que}$$

$$\mathcal{F}[x_p(t)] = \frac{1}{2}\,[X(\omega) + X^*(\omega)] = R(\omega)$$

$$\mathcal{F}[x_i(t)] = \frac{1}{2}\,[X(\omega) - X^*(\omega)] = jI(\omega)$$

o también

$$R(\omega) = 2\int_0^\infty x_p(t)\,\cos\omega t dt$$

$$I(\omega) = -2\int_0^\infty x_i(t)\,\operatorname{sen}\omega t dt$$

Análogamente, las transformadas inversas

$$x_p(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty R(\omega)\,\cos\omega t d\omega$$

$$x_i(t) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty I(\omega)\,\operatorname{sen}\omega t\, d\omega$$

I.3.8.6.- TEOREMA DE DUALIDAD

Sean x(t) y X(ω) un par de transformadas, esto es

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

llamando $z = \omega$

$$2\pi x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(z)\, e^{jzt}\, dz$$

por tanto

$$2\pi x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(z)\, e^{-jzt}\, dz$$

o bien cambiando las variables

$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Luego

$$X(t) \overset{F}{\leftrightarrow} 2\pi x(-\omega)$$

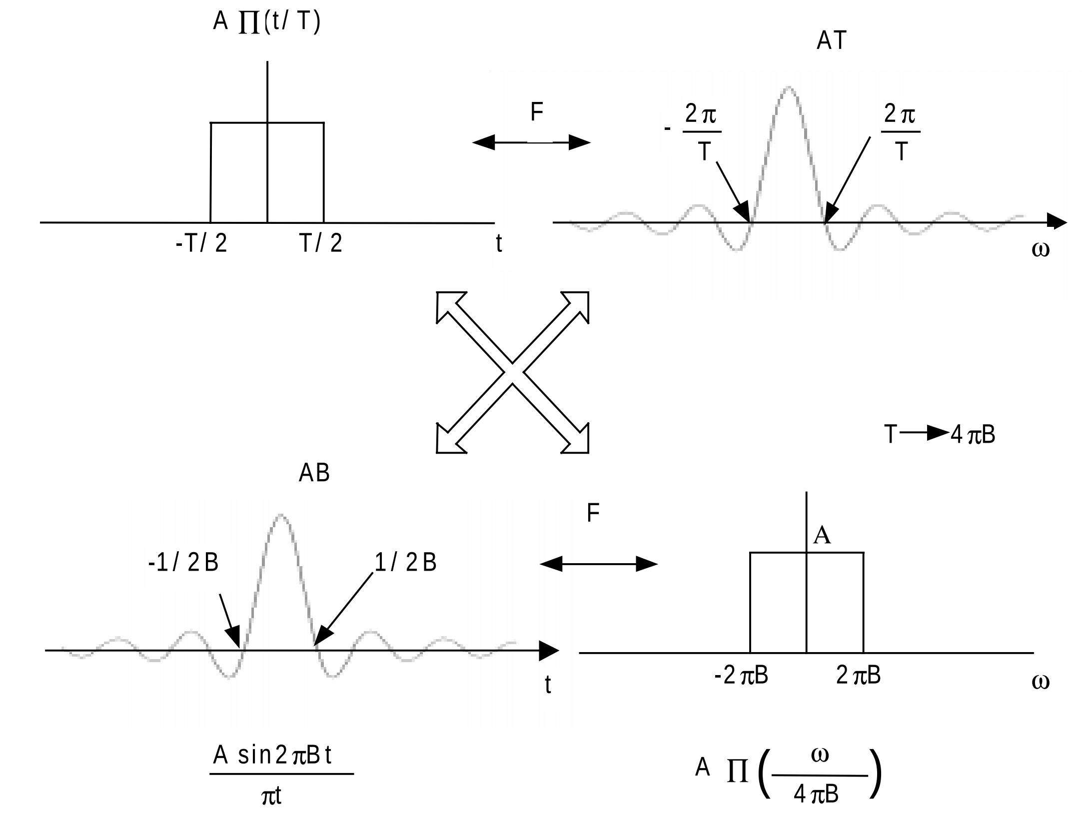
Ejemplos

1) $\delta(t) \overset{F}{\leftrightarrow} 1$

$$1 \overset{F}{\leftrightarrow} 2\pi\delta(\omega)$$

2) $A\prod(t/T) \overset{F}{\leftrightarrow} 2A\,\frac{\operatorname{sen}\omega T/2}{\omega}$

$$2A\,\frac{\mathrm{sen}2\pi Bt}{t} \quad \overset{F}{\longleftrightarrow} \quad 2\pi A\Pi\left(\frac{\omega}{4\pi B}\right)$$



3) Cálculo de la transformada de

$$x(t) = \frac{2}{t^2+1}$$

Puesto que

$$e^{-|t|} \quad \overset{F}{\longleftrightarrow} \quad \frac{2}{\omega^2+1}$$

Se tiene

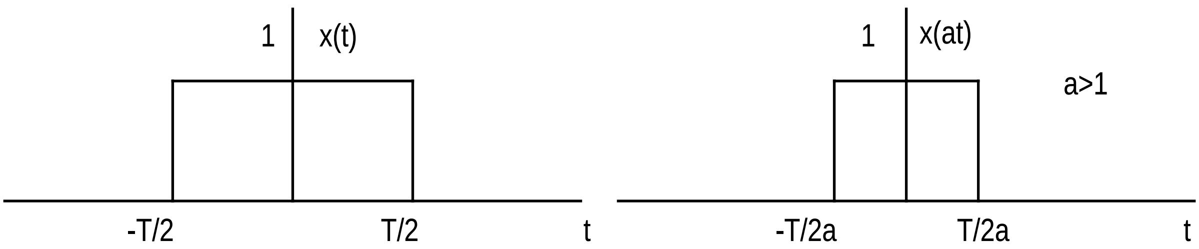
$$\frac{2}{t^2+1} \quad \overset{F}{\longleftrightarrow} \quad 2\pi e^{-|\omega|}$$

La propiedad de dualidad puede utilizarse para deducir las propiedades duales, es decir, si hay ciertas características de una función del tiempo que tienen implicaciones en el dominio de la frecuencia, por dualidad pueden deducirse las implicaciones en el dominio del tiempo de algunas funciones de frecuencia.

I.3.8.7.- CAMBIO DE ESCALA TEMPORAL Y FRECUENCIAL

Sea $\qquad x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(\omega)$

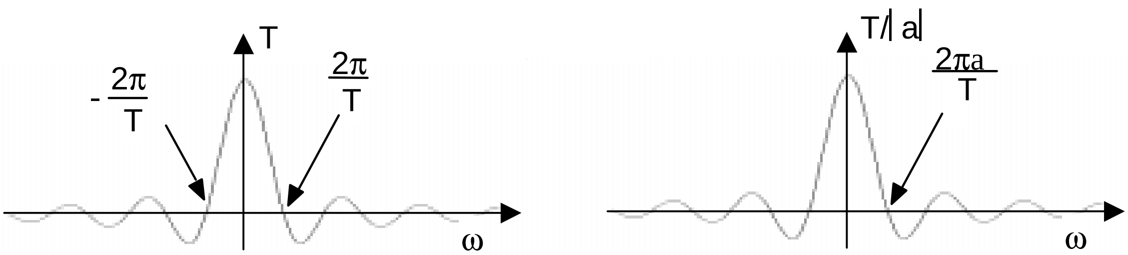
¿Cuál será la transformada de x(at)?



$$\int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t}\,dt = \begin{cases} u=at \\ du=adt \end{cases} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)\,e^{-j\omega/a\,u}\,du$$

$$= \frac{1}{|a|}\,X(\omega/a)$$

Los signos dentro del círculo corresponden a a < 0.



CONCLUSION :

Existe una relación inversa entre tiempo y frecuencia. Si la función temporal se comprime/expande, la transformada se expande/comprime según sea a > 1 ó a < 1.

Un disco grabado a 33 r.p.m. cuando se reproduce a 45 r.p.m. el tiempo se comprime y por tanto la respuesta frecuencial se expande, oyéndose más agudo.

I.3.8.8.- RETARDO TEMPORAL

Sea $x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(\omega)$

¿cuál será la transformada de $x(t-t_o)$?

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_o)\, e^{-j\omega t}\, dt = \begin{cases} t-t_o = u \\ dt = du \end{cases} = e^{-j\omega t_o} \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\, e^{-j\omega u}\, du$$

$$= e^{-j\omega t_o}\, X(\omega)$$

CONCLUSION :

Un retardo de tiempo se traduce en un retardo de fase lineal en la transformada y viceversa. El módulo de la transformada se conserva.

Así un sistema cuya respuesta frecuencial es de la forma

$$H(\omega) = k e^{-j\omega t_o}$$

Aplicado sobre una entrada x(t) da una salida

$$Y(\omega) = H(\omega)\, X(\omega) = k e^{-j\omega t_o}\, X(\omega)$$

cuya transformada inversa es

$$y(t) = kx(t-t_o)$$

Es decir, no introduce distorsión, tan sólo cambia la amplitud y retarda puramente la entrada

EJEMPLO

$$\delta(t) \overset{F}{\leftrightarrow} 1$$

$$\delta(t-t_o) \overset{F}{\leftrightarrow} e^{-j\omega t_o}$$

I.3.8.9.- DESPLAZAMIENTO FRECUENCIAL. MODULACION

Sea

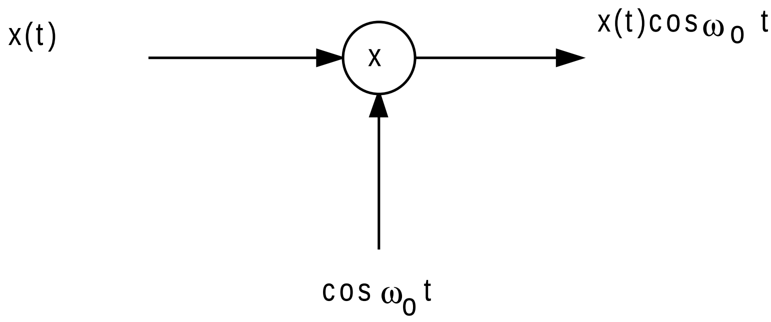
$$X(\omega) \overset{F^{-1}}{\leftrightarrow} x(t)$$

¿cuál será la transformada inversa de $X(\omega-\omega_o)$?

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega-\omega_o)e^{j\omega t}\, d\omega = \left\{\begin{array}{l}\omega-\omega_o=u \\ d\omega = du\end{array}\right. = e^{j\omega_o t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(u)e^{jut}\, du$$

$$X(\omega-\omega_o) \overset{F^{-1}}{\leftrightarrow} e^{j\omega_o t}\, x(t)$$

EJEMPLO

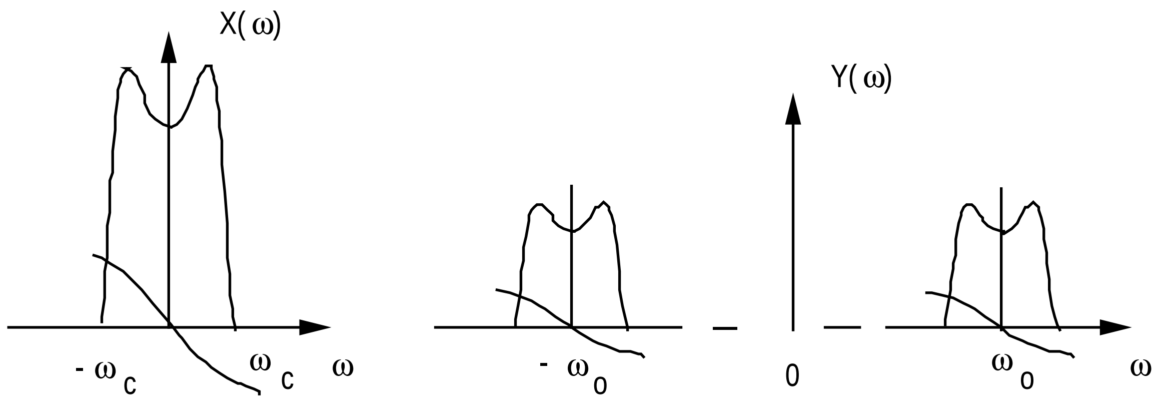


$y(t) = x(t) \cos\omega_o t$

$$\cos\omega_o t = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t}\right]$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t}\right] x(t)$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_o) + X(\omega+\omega_o)\right]$$



El ancho de banda es el doble.

I.3.8.10.- DIFERENCIACION

Sea

$$x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(\omega)$$

¿cuál será la transformada de $\frac{dx}{dt}$?

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\,\frac{d}{dt}\,e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \quad \overset{F}{\leftrightarrow} \quad j\omega X(\omega)$$

CONCLUSION :

Derivar en el tiempo es equivalente a multiplicar por $j\omega$ en el dominio de la frecuencia.

EJEMPLO : Ecuaciones diferenciales

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{N} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}$$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n (j\omega)^n\, Y(\omega) = \sum_{m=0}^{N} b_m (j\omega)^m\, X(\omega)$$

de donde se deduce que

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m (j\omega)^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n (j\omega)^n}$$

I.3.8.11.- INTEGRACION

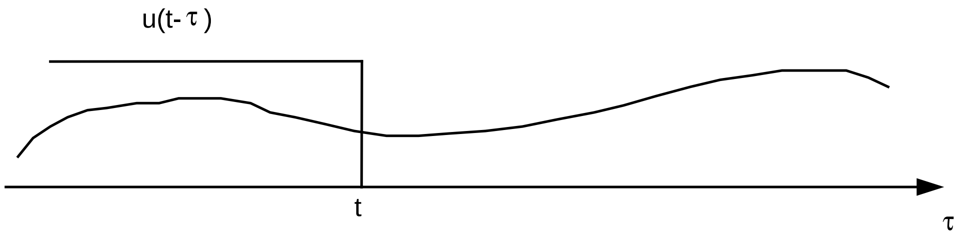
Sea

$$x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$$

¿cuál será la transformada de $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$?

Llamemos

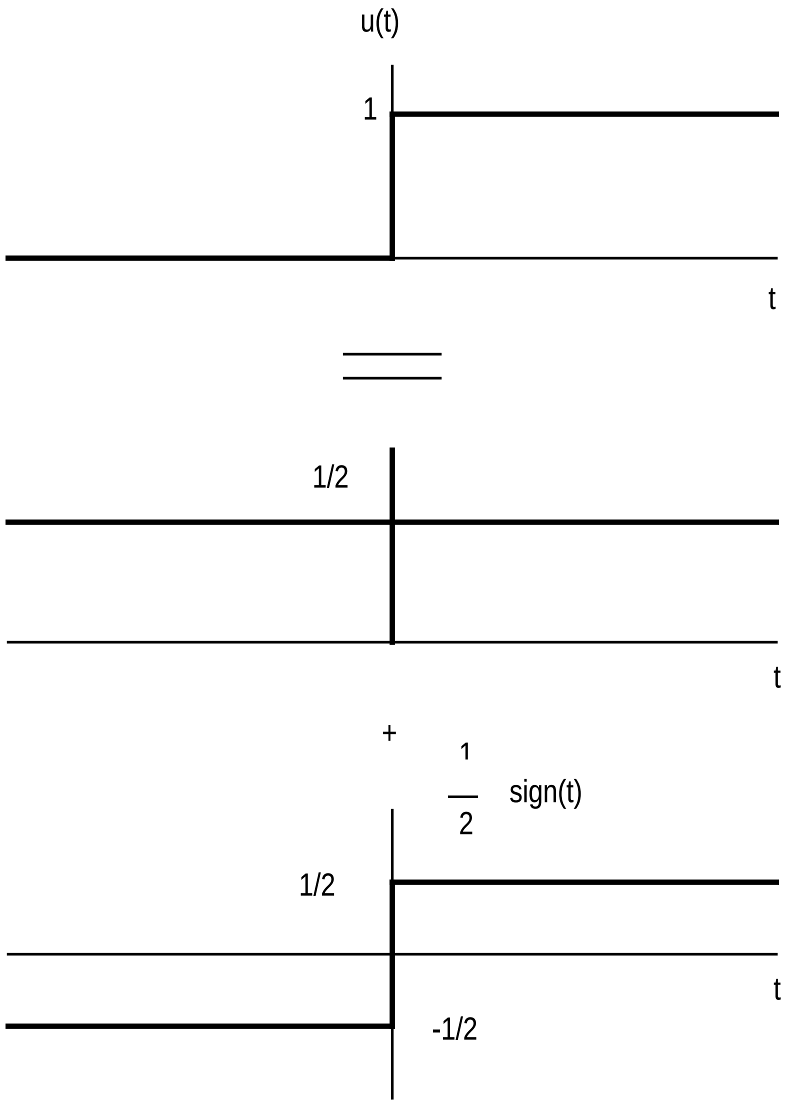
$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = x(t) * u(t)$$



Por tanto

$$\phi(\omega) = X(\omega)\, U(\omega)$$

Luego debe hallarse $U(\omega)$



$$u(t) = \frac{1}{2} + [u(t) - \frac{1}{2}] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ sign}(t)$$

$$U(\omega) = \frac{1}{2} 2\pi\, \delta(\omega) + \frac{1}{2} \mathcal{F}[\text{sign}(t)]$$

Para hallar la transformada de sign(t), hallamos la de su derivada.

$$\frac{d}{dt} [\text{sign}(t)] = 2\delta(t)$$

Luego

$$\text{sign}(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{2}{j\omega}$$

$$U(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

y por consiguiente

$$\phi(\omega) = \pi\, X(\omega)\, \delta(\omega) + \frac{X(\omega)}{j\omega}$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \quad \overset{F}{\leftrightarrow} \quad \pi X(0)\delta(\omega)+X(\omega)/j\omega$$

Obsérvese que

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt \quad = \quad \text{área de la señal}$$

I.3.8.12.- CONVOLUCION EN FRECUENCIA

$$X(\omega) * Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega')\, Y(\omega-\omega')\, d\omega'$$

Sustituyendo X(ω') por su expresión integral

$$X(\omega) * Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega' t}\, dt \right] Y(\omega-\omega')\, d\omega'$$

Intercambiando las integrales

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega-\omega')\, e^{-j\omega' t}\, d\omega' \right] dt = \begin{cases} u = \omega - \omega' \\ du = -d\omega' \end{cases} =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(u)\, e^{jut}\, du \right] dt =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Luego

$$X(\omega) * Y(\omega) \overset{F^{-1}}{\longleftrightarrow} 2\pi\, x(t)\, y(t)$$

Este teorema es dual del de la convolución en el tiempo.

I.3.9.- VENTANAS

I.3.9.1.- VENTANAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Sea $\qquad w(t) = 0 \qquad$ para $|t| > T$

Llamemos

$x_W(t) = x(t)\, w(t)$ señal enventanada

su transformada será

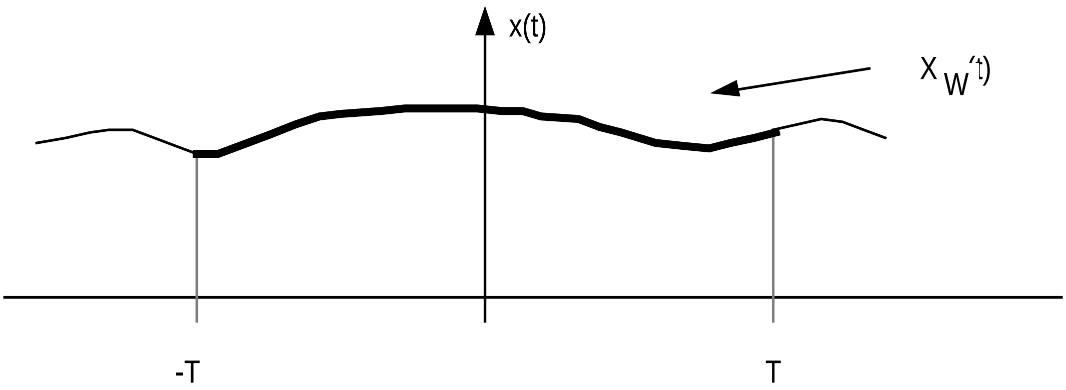
$$X_W(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * W(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega-\omega')\, W(\omega')\, d\omega'$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega') W(\omega-\omega')\, d\omega'$$

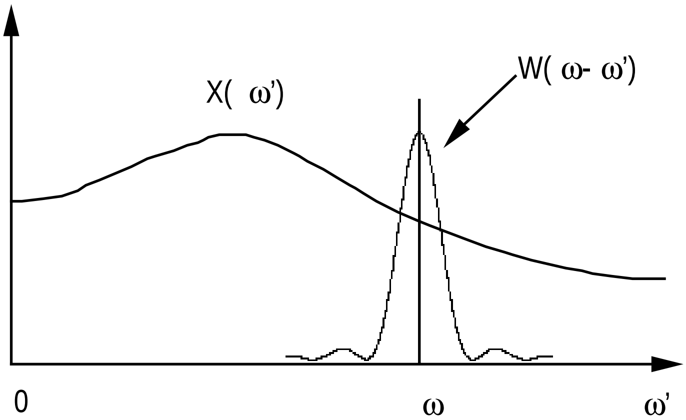
Siendo

$$W(\omega) = \int_{-T}^{T} w(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Sea $\qquad w(t) = \prod\left(\frac{t}{2T}\right) \qquad$ (Ventana rectangular)



La señal x(t) es observada a través de la ventana w(t), dando como resultado la señal $x_W(t)$. El efecto en el dominio de la frecuencia es el de la convolución de la transformada de la señal con la de la ventana.



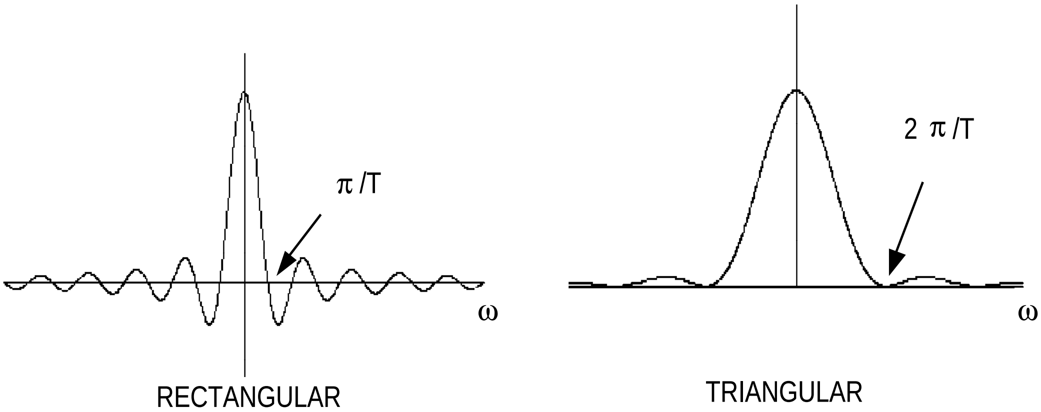
$$W(\omega) = \frac{2\mathrm{sen}\,\omega T}{\omega}$$

Para que la transformada de la señal enventanada $X_W(\omega)$ (transformada observada) se parezca a la transformada de la señal $X(\omega)$, $W(\omega)$ debe parecerse a una delta, o lo que es lo mismo, el tiempo de observación T debe tender a infinito. Para T finito, la extensión del lóbulo principal, así como los lóbulos secundarios de la transformada de la ventana distorsionan la transformada de la señal original.

Una manera de paliar el efecto de los lóbulos secundarios es ponderar los valores de la señal observada por una función temporal, esto es, utilizar otra ventana distinta de la rectangular, por ejemplo, sea la ventana triangular

$$w(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$$

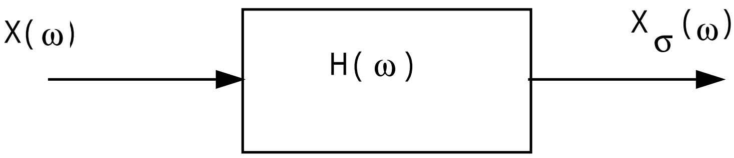
$$W(\omega) = \frac{1}{T}\;\frac{4\mathrm{sen}^2\omega T/2}{\omega^2}$$



La relación amplitud lóbulo principal/amplitud lóbulo secundario es bastante superior en la ventana triangular, por lo que el efecto de los lóbulos secundarios será menor, a costa de ensanchar el lóbulo principal. Esto último redunda en una resolución más pobre para la ventana triangular. Así, si la señal original x(t) contiene dos frecuencias separadas aproximadamente $|\omega_2 - \omega_1| \cong 2\pi/T$, la ventana rectangular daría dos picos mientras que la triangular daría uno sólo, no pudiendo resolver ambas frecuencias. La elección de una ventana será por tanto un compromiso entre resolución y efecto de lóbulos secundarios. La que mayor resolución tiene es la rectangular.

I.3.9.2.- VENTANAS EN FRECUENCIA. FENOMENO DE GIBBS

Es el efecto que produce el truncamiento en frecuencia de una señal, dual del truncamiento en tiempo.

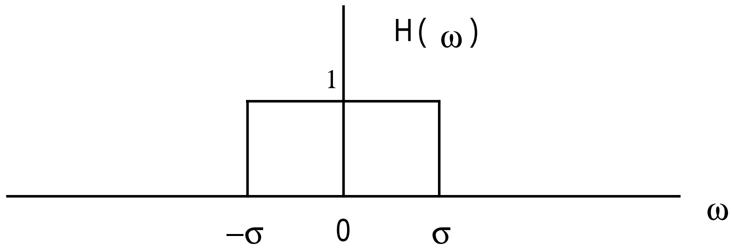


$$H(\omega) = 0 \qquad\qquad |\omega| > \sigma$$

$$X_\sigma(\omega) = H(\omega)\, X(\omega) \quad x_\sigma(t) = x(t) * h(t)$$

Sea el sistema

$$H(\omega) = \prod\left(\frac{\omega}{2\sigma}\right)$$



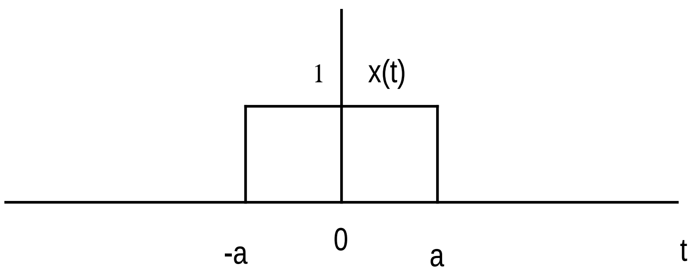
$$x_\sigma(t) = h(t) * x(t)$$

$$h(t) = \frac{\operatorname{sen}\sigma t}{\pi t}$$

$$x_\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \frac{\operatorname{sen}\sigma(t-\tau)}{\pi(t-\tau)}\, d\tau$$

Es evidente que el sistema distorsiona la señal de entrada.

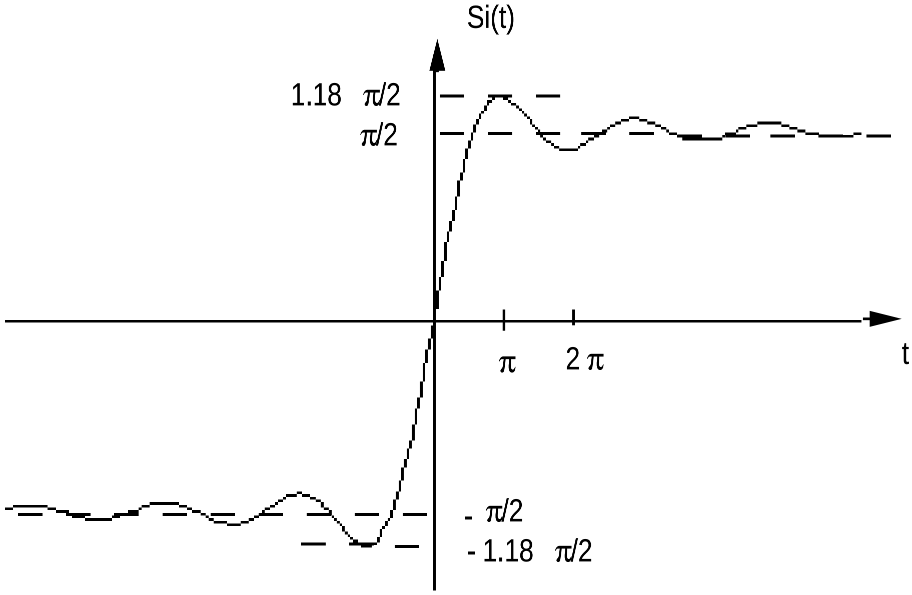
Para tener una idea de esta distorsión, consideremos la señal de entrada.



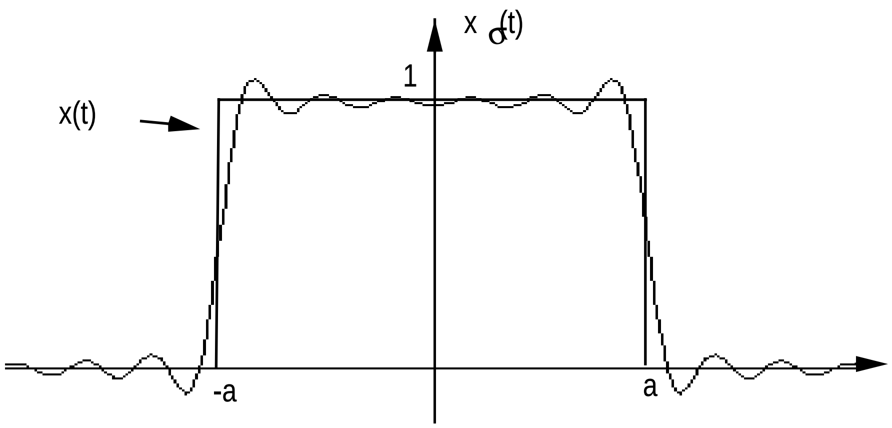
La salida es

$$x_\sigma(t) = \int_{-a}^{a} \frac{\operatorname{sen}\sigma(t-\tau)}{\pi(t-\tau)}\, d\tau = \frac{1}{\pi}\left\{ \operatorname{Si}[\sigma(t+a)] - \operatorname{Si}[\sigma(t-a)] \right\}$$

Siendo $Si(t) = \int_0^t \frac{\text{sen}\tau}{\tau}\, d\tau$ la función seno integral



La señal de salida es



A cada lado de las discontinuidades, la salida es oscilatorio. El valor de pico de la oscilación es independiente de a y es aproximadamente el 18% de la altura del pulso. De esta forma, aunque $a \to \infty$ la oscilación sigue existiendo aunque comprimida (Fenómeno de Gibbs).